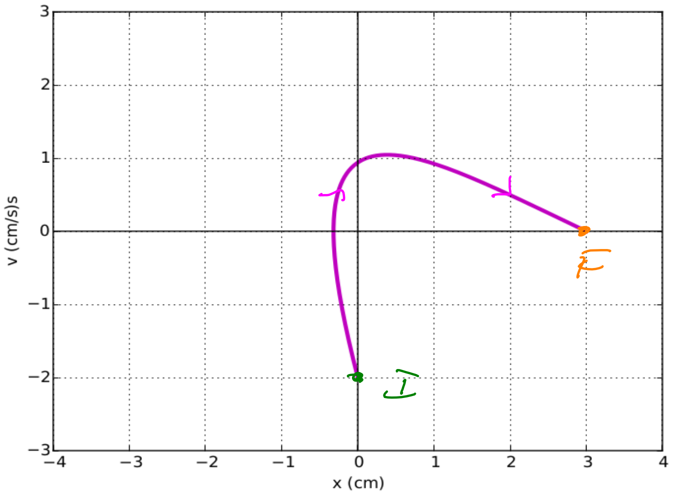
TD S11. Corrigé

1. Trajectoire de phase



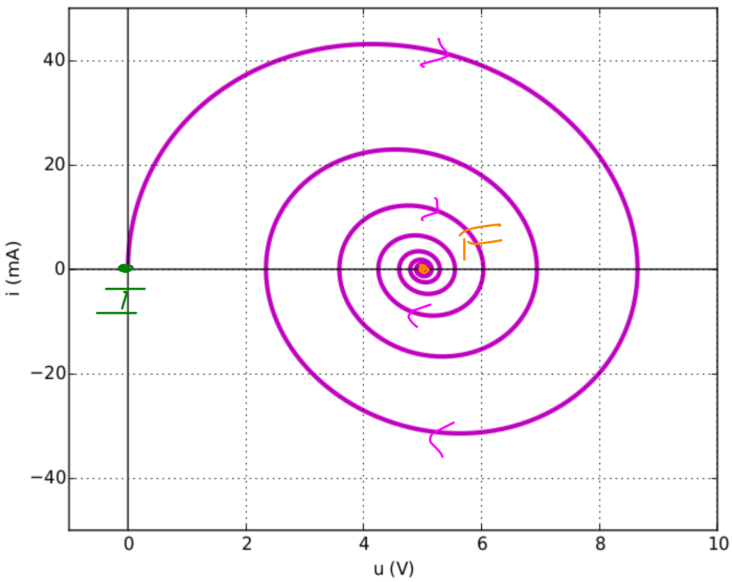
Régime apériodique.

État I : $(0, -2\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}})$

État F : $(3, 0)$ ↑ x_{eq}

$v \in [-2\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}, 1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}]$

$x \in [-0{,}3\,\mathrm{cm}, 3\,\mathrm{cm}]$



Régime pseudo-périodique

$I = (0, 0)$

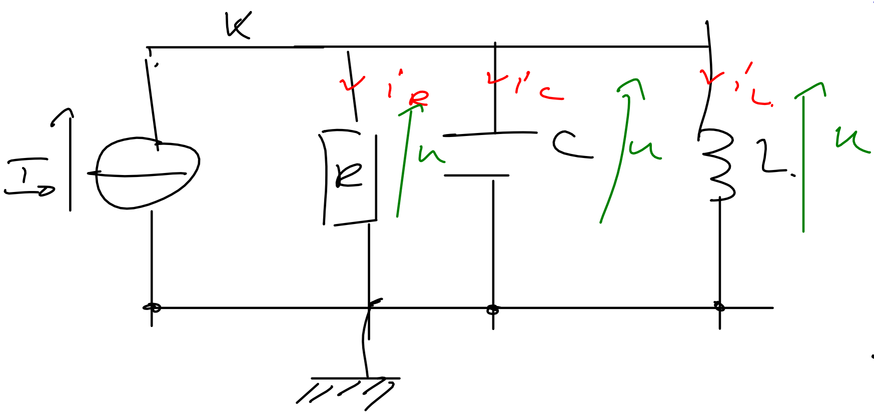
$F = (5\,V, 0)$

Amplitude :

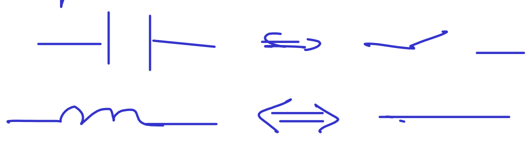
$i \in [-30\,\mathrm{mA}, 42\,\mathrm{mA}]$

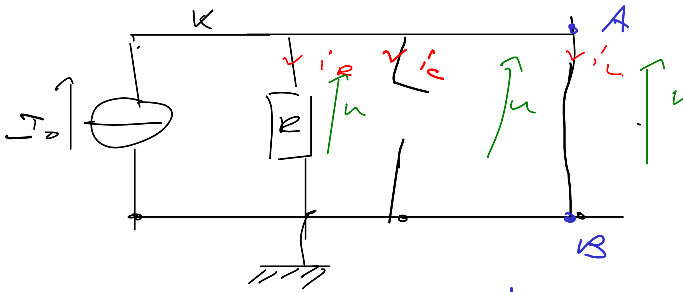
$u \in [0, 8{,}5\,V]$

S2 - Circuit « Bouchon »



1/ à $t = 0^-$: régime permanent donc :



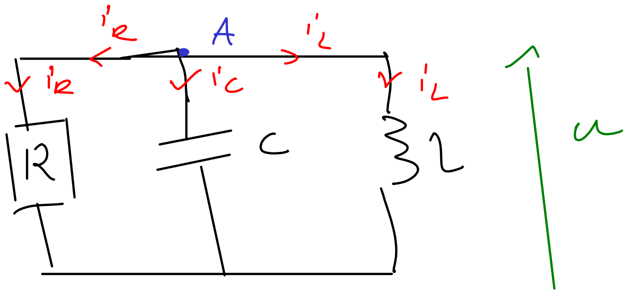


$\Longrightarrow$ $u(0^-) = 0$ (tension aux bornes du fil AB)

$i_C(0^-) = 0$

$i_R(0^-) = \dfrac{u(0^-)}{R} = 0 \Longrightarrow i_L(0^-) = I_0$

2) à $t = 0$, on ouvre K.



Equation d'évolution :

$i_R + i_C + i_L = 0$ avec $i_R = \frac{u}{R}$

$i_C = C\frac{du}{dt}$

$u = L\frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow i_L = \int \frac{u}{L}\,dt$

d'où :

$$\frac{u}{R} + C\dot{u} + \int \frac{u}{L}\,dt = 0$$

On dérive par rapport à t pour éliminer $\int$:

$$\frac{\dot{u}}{R} + C\ddot{u} + \frac{u}{L} = 0$$

Forme canonique : $/C$

$$\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{RC} + \frac{u}{LC} = 0$$

on pose $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$

$Q = RC\omega_0 \Leftrightarrow \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$

dissipation d'énergie.

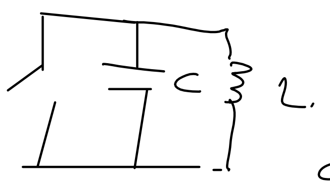
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

3) A quelle condition sur Q, les pertes d'énergie sont nulles ?

$$\frac{\omega_0}{Q} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow Q \longrightarrow +\infty$$

or $Q = RC\omega_0$, C et ω_0 fixé

d'où $R \longrightarrow +\infty$ soit —[R]— $\Leftrightarrow$ —/ —



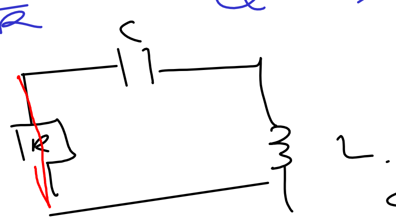
Revient à enlever la résistance ...

circuit LC

Comparaison au circuit RLC série :

$Q = \frac{L\omega_0}{R}$: $Q \longrightarrow +\infty \Rightarrow R \longrightarrow 0$

—[R]— $\Leftrightarrow$ ——



circuit LC

4/ $R = 100\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 1\,\mu F$

$$Q = RC\omega_0 = RC \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

A.N. : $Q = 100 \times \sqrt{\frac{10^{-6}}{1}} = 0{,}1$

$Q = 0{,}1 < \frac{1}{2}$: apériodique.

Equat° caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 > 0 \quad (\text{car } Q < \tfrac{1}{2})$$

D'où : $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right)$

On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$, $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$

$$\boxed{r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm \Omega}$$

Solution :

pour $t > 0$ $\longrightarrow$ $u(t) = e^{-t/\tau}\left(a\,\text{ch}(\Omega t) + b\,\text{sh}(\Omega t)\right)$

5) Solution complète ?

Relation de continuité :

- $u(0^+) = u(0^-)$ (1) (tension aux bornes du condensateur)
- $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ (2) (courant traversant la bobine)

(1) : $u(0^-) = 0$, $u(0^+) = a$ $\Longrightarrow$ $\underline{a = 0}$

(2) : il faut $i_L(t)$ pour $t > 0$:

$i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t)$

avec $i_R(t) = \frac{u}{R}$ et $i_C(t) = C\dot{u}$

il faut $\dot{u}(t)$:

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t/\tau} \times b \times \text{sh}(\Omega t)\right)$$

$$= -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} b\,\text{sh}(\Omega t) + b e^{-t/\tau} \times \Omega \times \text{ch}(\Omega t)$$

D'où : $i_L(0^+) = -\frac{u(0^+)}{R} - C\dot{u}(0^+)$

$= 0 - Cb\Omega \Longleftrightarrow i_L(0^+) = -Cb\Omega$

$i_L(0^-) = I_0$

d'où (2) $\Longleftrightarrow -C\Omega b = I_0$

$\Longleftrightarrow b = -\dfrac{I_0}{C\Omega}$

$[b] = \dfrac{[I_0]}{[C][\Omega]} = \dfrac{[I_0]}{[C]} \times T$

or $\tau = RC$

$\Longleftrightarrow [C] = \dfrac{T}{[R]}$

d'où

$[b] = \dfrac{I \times [R]}{\cancel{T}} \times \cancel{T} = [U]$

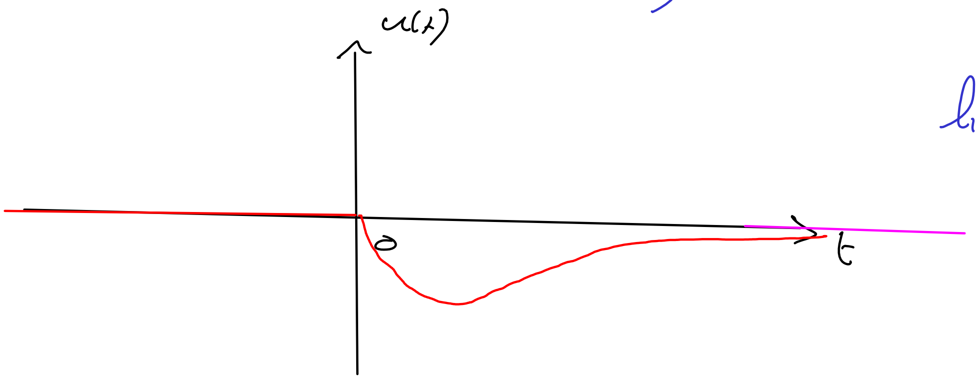
Finalement :

$$\boxed{u(t) = -\frac{I_0}{C\Omega} e^{-t/\tau} sh(\Omega t)}$$

pour $t > 0$

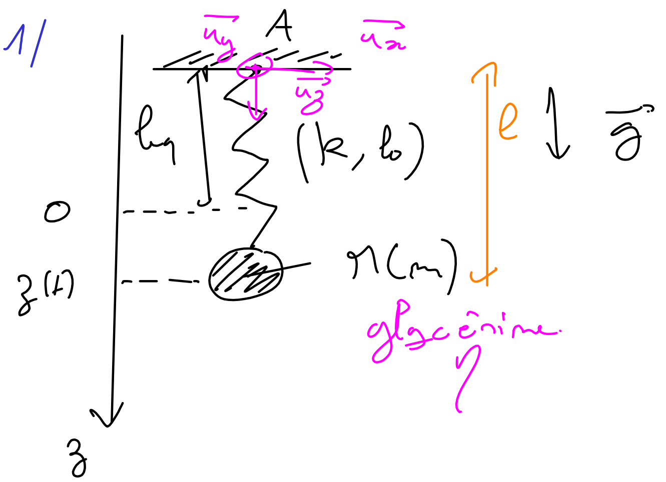
(pour $t < 0$, $u(t) = 0$)

$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$



S4- Oscillations dans la glycérine

1/



Syst : M(m)

Réf : labo R, galiléen

BDF :

Base de travail $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

- poids :
  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$
- tension du ressort :
  $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u_z}$
  avec $l = l_{eq} + z$
  $\vec{T} = -k(l_{eq} + z - l_0)\vec{u_z}$
- frottement :
  $\vec{f} = -6\pi R\eta \vec{v}$
  $= -6\pi R\eta \dot{z} \vec{u_z}$
- poussée d'Archimède :
  $\vec{\Pi} = -\rho_{gly} V \vec{g}$

(4) 2ème loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{\Pi}$

avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u_z}$

D'où :

$m\ddot{z} = \cancel{mg} - k(\cancel{l_{eq}} + z - \cancel{l_0}) - 6\pi R\eta \dot{z}$
$- \cancel{\rho V g}$

avec à l'éq : par def de l_{eq}

$0 = mg - k(l_{eq} - l_0) - \rho V g$

$$\boxed{m\ddot{z} + 6\pi R\eta \dot{z} + kz = 0}$$

$$\ddot{z} + \frac{6\pi R\eta}{m}\dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi R\eta}{m}.}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0}$$

2/ Pseudo-période T ?

Régime pseudo-périodique : $Q > \frac{1}{2}$

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$\Delta < 0$: $r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$

avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

et $\underline{\omega = \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

soit $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ soit $\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$ $T > T_0$

3/ $\underline{\text{Air}}$: $\rho = 1,3\ g.L^{-1} = 1,3\ kg.m^{-3}$

$\eta = 10^{-5}\ Pa.s$

$*$ $Q = \frac{m\,\omega_0}{6\pi R\eta} = \frac{m}{6\pi R\eta} \times \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{6\pi R\eta}$

$Q\ air = \frac{\sqrt{20 \times 1}}{6\pi \times 3,1 \times 10^{-2} \times 10^{-5}} \simeq \frac{4,5}{20 \times 9} \times 10^7$

$\gg 1$

$*$ $\Rightarrow T \simeq T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{20}} \sim \frac{6,5}{4,5} \sim 1,4\,s$

$\underline{\text{Glycérine}}$: $\rho = 1,26 \times 10^{+3}\ kg.m^{-3}$

$\eta = 1,49$

$Q\ gly = \frac{\sqrt{20}}{6\pi \times 3,1 \times 10^{-2} \times 1,49} \sim \frac{4,5}{20 \times 3 \times 1,5} \times 10^2 \sim 4,5$

$> 1/2$

$*$ $\Rightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{1,4}{\sqrt{1-\frac{1}{4\times(4,5)^2}}} = 1,41\,s$

Commenter : $T \simeq T_0$.

4/ $\quad Re = \dfrac{\rho U L}{\eta}$

* Air : $\quad \rho = 1,3 \ kg.m^{-3}$

$L = R = 3,1 \times 10^{-2} \ m.$

$\eta = 10^{-5} \ Pa.s$

$U \sim \dfrac{2 z_m}{T_0/2} \sim \dfrac{4 z_m}{T_0}$ ← amplitude max du mvt.

$Re \ll 1 \iff \dfrac{\rho \dfrac{4 z_m}{T_0} \times R}{\eta} \ll 1$

$\iff \underline{z_m \ll \dfrac{\eta T_0}{4 \rho R}}$ $\quad (\eta = 10^{-5}, \ T_0 = 1,4, \ \rho = 1, \ R = 3 \cdot 10^{-2})$

$\underline{A.N.}$ $\quad z_m \ll 10^{-4} \ m$

$z_m \ll \underline{0,1 \ mm}$

En pratique dans l'air, le modèle de Stokes est non valable.

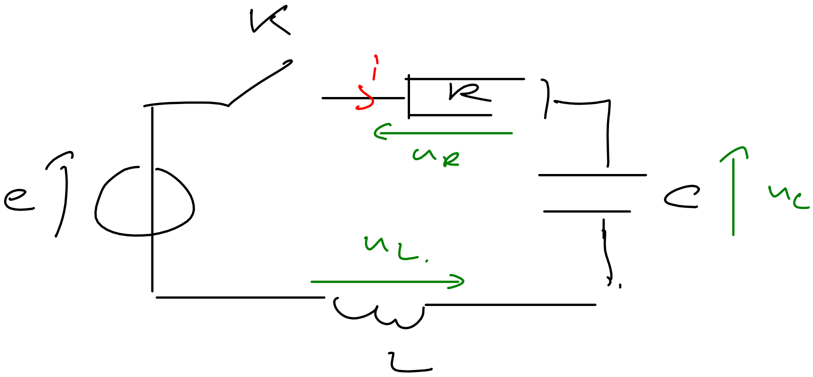
* Glycérine.

$z_m \ll \dfrac{\eta T_0}{4 \rho R}$ $\quad (\eta = 1,5, \ T_0 = 1,4, \ 4, \ \rho = 10^3, \ R = 3 \times 10^{-2})$

$\underline{A.N}$ $\quad z_m \ll 1 \ cm.$

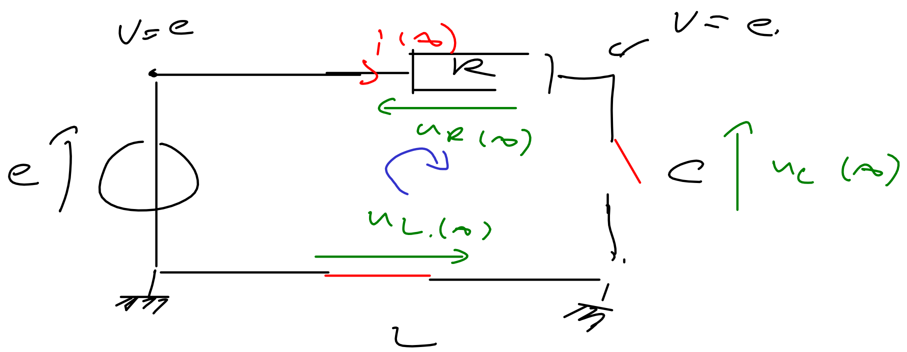
Très faibles oscillations

S3 – RLC série soumis à une tension créneau



à $t=0$, on ferme K.

1.1/ $t \to \infty$: conditions finales. (Régime stationnaire)



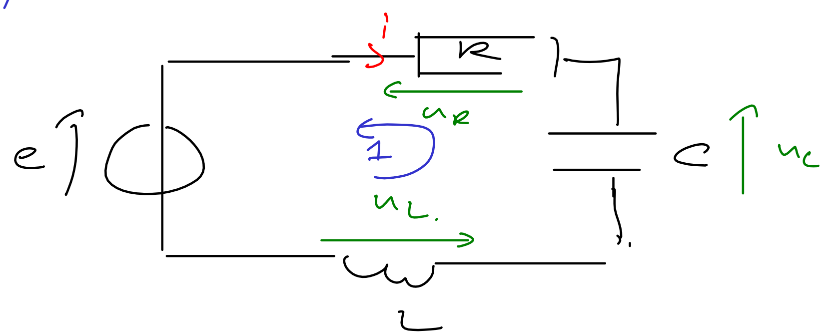
$i(\infty) = 0$

$u_R(\infty) = Ri(\infty) = 0$

$u_L(\infty) = 0$

$u_C(\infty) = e - u_R(\infty) - u_L(\infty)$

1.2/



Equation d'évolution

①: $u_R + u_C + u_L = e$

avec

$u_R = Ri$

$i = C\dot{u}_C$

$u_L = L\dfrac{di}{dt}$.

D'où : $Ri + u_C + L\dfrac{di}{dt} = e$ avec $i = C\dot{u}_C$

$$\Leftrightarrow RC\dot{u}_C + u_C + LC\ddot{u}_C = e$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e} \quad (1)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

$\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{L\omega_0}{R}$

<u>Solution</u> : $u_C(t) = u_H(t) + u_P(t)$

$u_H(t)$: régime libre = sol de l'eq homogène.

$u_P(t)$: régime établi = sol particulière de l'eq (1)

$\underbrace{\hphantom{u_H(t) + u_P(t)}}_{}$ régime transitoire = superposition du régime libre et du régime établi.

Cherchons $u_H(t)$.

$Q = 10 > \frac{1}{2}$ donc le régime libre est apériodique.

$$u_H(t) = e^{-t/\tau}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

(voir cours)

Cherchons une solution particulière

Le 2d membre est cst donc cherchons $u_p(t) = \text{cste}$.

u_p solution de (1) $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\cancel{\ddot{u}_p}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_p}}_{0} + \omega_0^2 u_p = \omega_0^2 e \Leftrightarrow \boxed{u_p = e}$

Solution : $\boxed{u_C(t) = e + e^{-t/\tau}\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right)}$ pour $t > 0$

Déterminons a et b

Relations de continuité :

* continuité de la tension aux bornes du condensateur. At $t = 0$:

$u_C(0^+) = u_C(0^-)$ avec $\left.\begin{aligned} u_C(0^+) &= e + a \\ u_C(0^-) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{a = -e}$

* continuité du courant traversant la bobine :

$i_L(0^+) = i_L(0^-)$ avec $i_L(0^-) = 0$

$i_L(0^+) = i_C(0^+)$

Évaluons i_C.

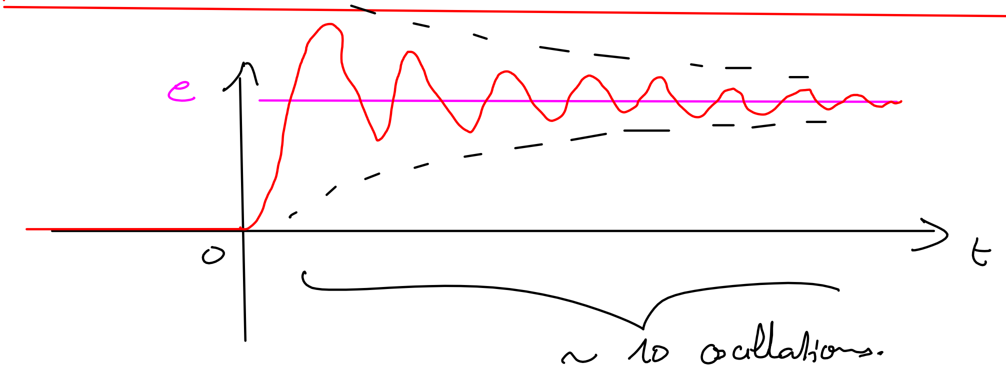
$$i_C(t) = C\dot{u}_C = C\left[-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + \omega e^{-t/\tau}(-a\sin(\omega t) + b\cos\omega t)\right]$$

$$\Rightarrow i_C(0^+) = -\frac{C}{\tau}a + \omega C b$$

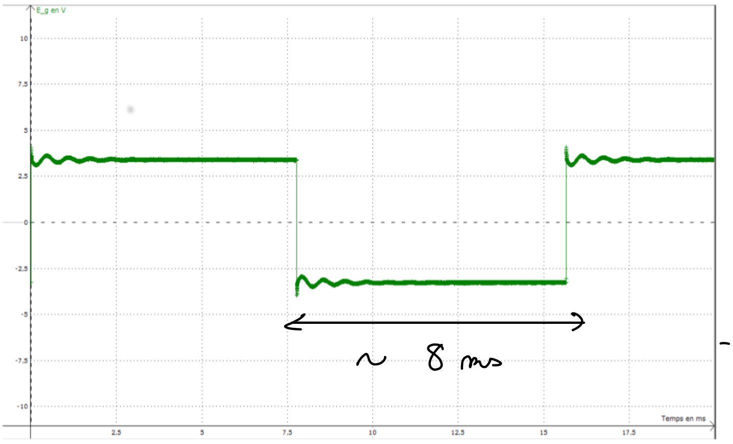
Alors $i_L(0^+) = i_L(0^-) \Leftrightarrow +\frac{\cancel{C}}{\tau}e + \omega\cancel{C}b = 0 \Leftrightarrow \underline{b = \frac{e}{\omega\tau}}$

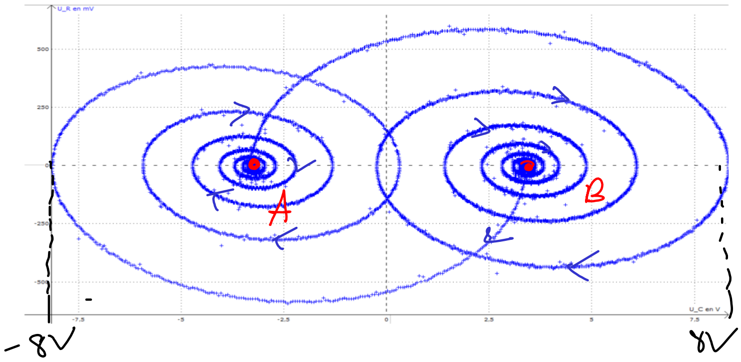
Finalement :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad u_C(t) = e\left[1 + e^{-t/\tau}\left(\cos\omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t\right)\right]}$$



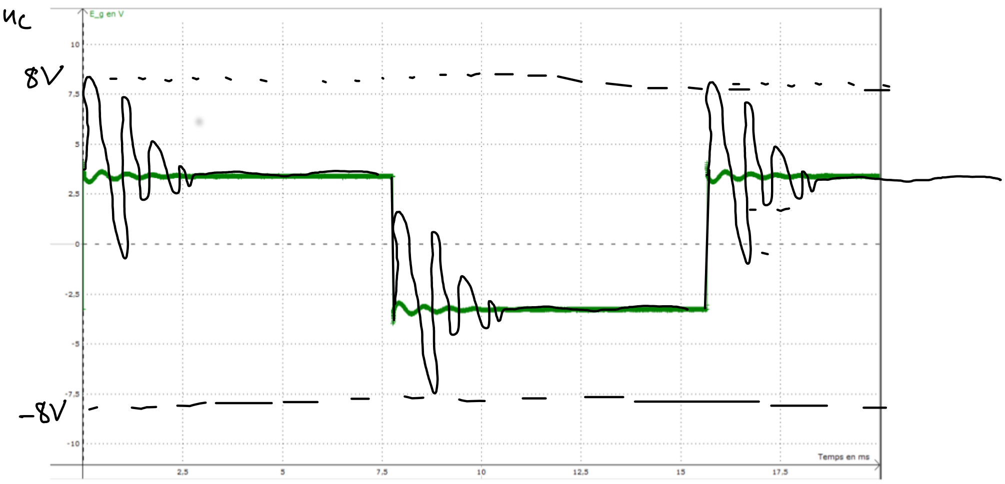
2. Le circuit RLC-série est soumis à la tension créneau :





2.1/ L'oscillateur passe périodiquement de l'état A $(-3V, 0)$ à l'état B $(3V, 0)$ via des régime transitoire pseudo-périodique (~ 5 pseudo-oscillations). L'OH passe périodiquement d'un état stationnaire à un autre à la période de la tension créneau.

2.2/ Allure de $u_C(t)$



2.3/ $\left.\begin{array}{l} R + r_L = 138{,}3\ \Omega \\ L = 0{,}1\ H \\ C = 1{,}1 \times 10^{-7}\ F \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \approx 9500\ \text{rad.s}^{-1}$

$Q = \dfrac{L\omega_0}{R + r_L} = 6{,}9$

$\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} \approx 1{,}5\ \text{ms} \Rightarrow 5\tau \sim T' = 8\ \text{ms}$, ½ période de la tension créneau.

Le régime stationnaire est atteint à chaque ½ période. Cohérent avec la trajectoire de phase.

Évaluons le nombre de pseudo-oscillations :

$N \sim \dfrac{5\tau}{T}$ ← durée du régime transitoire ; T ← pseudo-période

avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $T \approx T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\left(\text{car } \dfrac{1}{4Q^2} \approx \dfrac{1}{4 \times 50} \sim \dfrac{1}{200}\right)$

$\Rightarrow N \sim \dfrac{10Q}{\omega_0} \times \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim \dfrac{5}{\pi} Q \sim 11$ | Honnêtement, on ne voit que 5 pseudo-oscillation sur la traj. de phase.